■ Ai Tusi Fatimah ■ Nur Eva Zakiah

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL

(BERBASIS KONTEKS TEKNIK DAN BISNIS SEPEDA MOTOR)

ISBN 978-602-5942-88-4

9 786025 942884

TSAQIVA PUBLISHING

■ Ai Tusi Fatimah ■ Nur Eva Zakiah

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN
NILAI MUTLAK
BENTUK LINEAR SATU VARIABEL
(BERBASIS KONTEKS TEKNIK DAN BISNIS SEPEDA MOTOR)

TSAQIVA
PUBLISHING

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL (BERBASIS KONTEKS TEKNIK DAN BISNIS SEPEDA MOTOR)

Ciamis: Tsaqiva Publishing
vi + 63 hal; 17,25 cm × 25 cm
ISBN : 978-602-5942-88-4
Edisi I
Cetakan ke-1 (November 2019)

Penulis : Ai Tusi Fatimah dan Nur Eva Zakiah
Penyunting : Tim Tsaqiva Publishing
Penata Letak Isi : Tim Tsaqiva Publishing
Desain Sampul : Tim Tsaqiva Publishing

Kantor Redaksi:

Jl. Kapten Murod Idrus, Ciamis, Jawa Barat

www.tsaqiva-publishing.co.id
tsaqiva.publishing@gmail.com
Penerbit Tsaqiva
Penerbit Tsaqiva
0812 2080 369

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan kepada Allah SWT. karena berkat rahmat dan hidayah-Nya buku Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel ini bisa terselesaikan dengan baik.

Buku ini merupakan luaran dari Penelitian Dosen Pemula Kementrian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi Republik Indonesia tahun 2019 yang berjudul Rancangan Tugas Matematis Melalui Analisis Matematika Kejuruan Kompetensi Keahlian Bisnis dan Teknik Sepeda Motor.

Bisnis dan Teknik Sepeda Motor (TBSM) merupakan salah satu kompetensi keahlian di Sekolah Menengah Kejuruan (SMK). TBSM masuk pada Bidang Keahlian Teknologi dan Rekayasa, Program Keahlian Teknik Otomotif dalam Bidang Keahlian.

Kurikulum TBSM memuat Mata Pelajaran Matematika yang terkategori muatan nasional dengan kompetensi dasar berlaku untuk semua bidang keahlian di SMK. Semua mata pelajaran di SMK tentunya berorientasi pada tujuan khusus pendidikan kejuruan yang tercantum pada Undang-Undang Sistem Pendidikan Nasional Nomor 20 Tahun 2003 yaitu, "Pendidikan kejuruan merupakan pendidikan menengah yang mempersiapkan peserta didik terutama untuk bekerja dalam bidang tertentu". Hal tersebut dapat dilihat dari Standar Kompetensi Kelulusan Matematika yaitu, "Memiliki pemahaman matematika dalam melaksanakan tugas sesuai keahliannya".

Usaha untuk mewujudkan pemahaman matematis sesuai kompetensi keahliannya dapat dilakukan dengan menyediakan bahan ajar matematika yang bersesuaian dengan keahliannya. Oleh karena itu, buku ini hadir untuk membantu peserta didik SMK Kompetensi Keahlian TBSM mempelajari dan memahami materi matematika secara bermakna. Buku ini menyajikan kompetensi dasar matematika yaitu, 3.2. menerapkan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel, 4.2. menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.

Buku ini terdiri dari tiga bagian. Pertama, pendahuluan memuat konsep-konsep prasyarat yang mendukung konsep dan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Materi prasyarat meliputi nilai mutlak, persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel, serta persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Bagian kedua memuat persamaan nilai mutak bentuk linear satu variabel dan penyelesaiannya. Bagian ketiga memuat pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear dua variabel dan penyeelesaiannya. Masing-masing bagian memuat contoh soal, latihan soal, serta dilengkapi dengan alternatif jawabannya. Kekahasan buku ini adalah setiap konsep pada ketiga bagian terintegrasi dalam suatu konteks jangkauan yang merupakan bagian penting dalam konteks TBSM seperti yang sudah dianalisis oleh Fatimah & Zakiah (2019).

Semoga dengan hadirnya buku ini dapat bermanfaat untuk peserta didik SMK Kompetensi Keahlian TBSM khususnya dan umumnya kepada pemerhati atau peneliti di area matematika kejuruan.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada Kementrian Riset, Teknologi, dan Pendidikan Tinggi Republik Indonesia dan segenap civitas SMK Mifathussalam Ciamis atas kesempatan yang diberikan kepada kami untuk melakukan penelitian sehingga terwujudnya buku ini.

Ciamis, 19 Oktober 2019

Ai Tusi Fatimah
Nur Eva Zakiah

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

1 PENDAHULUAN

Kompetensi, Tujuan Instruksional, dan Peta Konsep

Bagian ini memuat materi prasyarat bagi persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Materi tersebut terdiri dari:

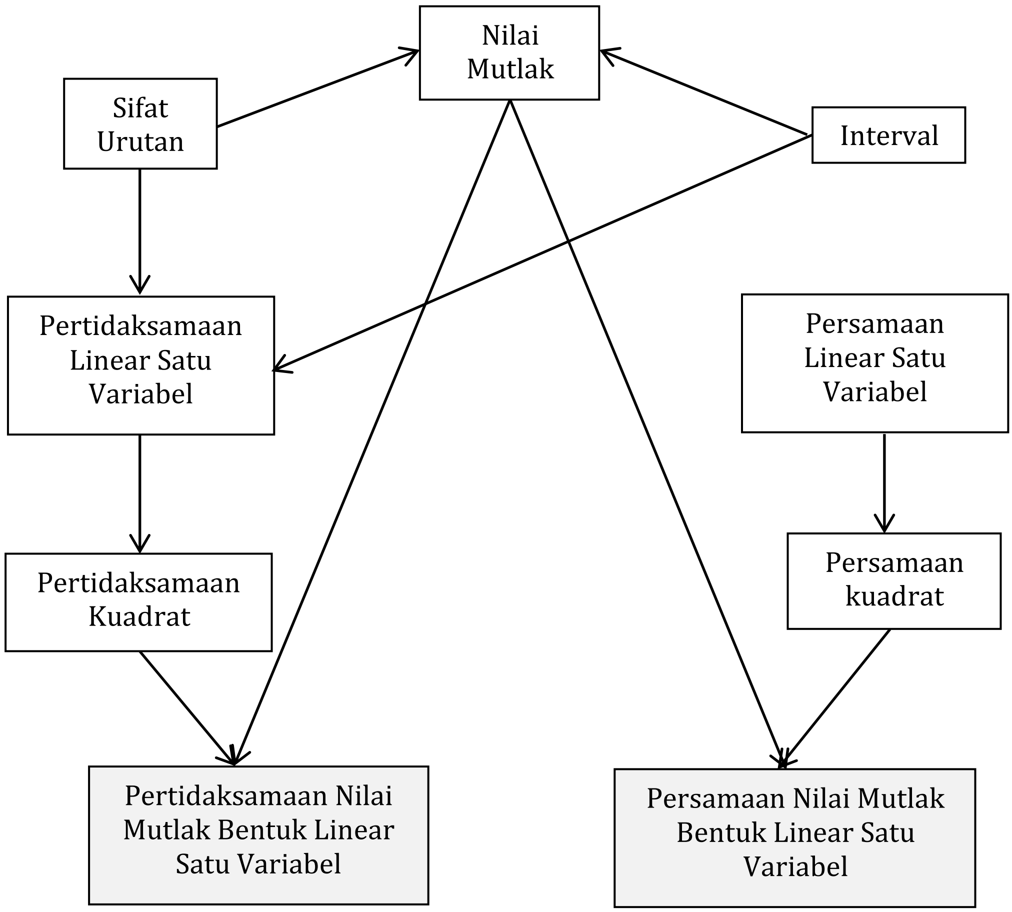
1. Interval
2. Sifat urutan
3. Nilai mutlak
4. Persamaan linear satu variabel
5. Pertidaksamaan linear
6. Persamaan kuadrat
7. Pertidaksamaan kuadrat

Tujuan pembelajaran materi-materi prasyarat tersebut ditujukkan supaya peserta didik memiliki kemampuan pemahaman konsep-konsep untuk mendukung kompetensi dasar yaitu:

3.2. menerapkan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

4.2. menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

Materi prasyarat digambarkan dalam peta konsep berikut ini



Gambar 1.1 Peta Konsep Materi Prasyarat

A Interval

Interval atau selang pada himpunan bilangan real R dapat direpresentasikan dalam bentuk geometris maupun notasi atau lambang. Secara geometris interval direpresentasikan dalam bentuk ruas garis, sedangkan secara notasi dapat direpresentasikan dalam notasi kurung atau notasi pembentuk-himpunan.

Interval terdiri dari interval terbuka dan tertutup. Terdapat sembilan jenis interval yang mungkin terjadi pada suatu bilangan real. Kesembilan jenis selang tersebut akan dijelaskan pada bagian ini.

Pada pembahasan tentang interval ini, selalu diasumsikan bahwa $a < b$.

Jenis interval 1

Jika $a < b$, interval terbuka dari a ke b berisi semua bilangan di antara a dan b dinyatakan dengan lambang (a, b) atau dapat juga dinyatakan dengan notasi pembentuk-himpunan yaitu:

$$\{x | a < x < b\}$$

Ujung interval adalah a dan b.

Ujung interval biasa juga disebut *end point*.

Perhatikan ujung interval. Pada interval terbuka, bilangan yang terletak pada ujung interval tidak termasuk pada anggota dari himpunan tersebut. oleh karena itu, interval terbuka ditandai dengan kurung biasa ( ).

Interval (a, b) dapat direpresentasikan dengan ruas garis berikut.

Gambar 1.2 Interval Terbuka

Ujung interval pada Gambar 1.2 digambar dengan bulatan kosong yang menunjukkan bahwa bilangan tidak masuk pada anggota himpunan tersebut.

Jenis interval 2

Jika $a < b$, interval tertutup dari a ke b berisi semua bilangan mulai dari a sampai b dinyatakan dengan lambang $[a, b]$ atau dapat juga dinyatakan dengan notasi pembentuk-himpunan yaitu:

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

Ujung interval adalah a dan b. Pada interval tertutup, bilangan yang terletak pada ujung interval masuk pada anggota dari himpunan tersebut. oleh karena itu, interval terbuka ditandai dengan kurung siku [ ].

Interval $[a, b]$ dapat direpresentasikan dengan ruas garis berikut.

Gambar 1.3 Interval Tertutup

Ujung interval pada Gambar 1.3 digambar dengan bulatan penuh yang menunjukkan bahwa bilangan masuk pada anggota himpunan tersebut.

Jenis interval 3 dan 4

selain dua jenis interval tersebut, terdapat interval yang salah satu ujungnya tidak termasuk pada anggota himpunan pada interval. Perhatikan Gambar 1.4 berikut.

(a)

(b)

Gambar 1.4 Selang Setengah-Terbuka atau Setengah-Tertutup

Gambar 1.4 merepresentasikan interval dalam bentuk ruas garis. Gambar 1.4 bagian (a) juga dapat direpresentasikan dengan lambang $[a, b)$ atau notasi pembentuk-himpunan:

$$\{x | a \leq x < b\}$$

Bilangan pada ujung kiri yaitu a masuk pada anggota himpunan, sedangkan bilangan pada ujung kanan yaitu b tidak masuk pada anggota himpunan.

Gambar 1.4 bagian (b) dapat direpresentasikan dengan lambang $(a, b]$ atau notasi pembentuk-himpunan:

$$\{x|a < x \leq b\}$$

Bilangan pada ujung kiri yaitu a tidak masuk pada anggota himpunan, sedangkan bilangan pada ujung kanan yaitu b masuk pada anggota himpunan.

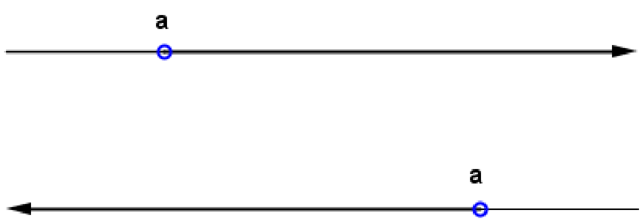
Jenis interval 5 dan 6

Jenis selang yang lainnya yaitu terbuka tak hingga yang dapat direpresentasikan dalam notasi berikut.

$$(a, \infty) = \{x|x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x|x < a\}$$

Masing-masing bentuk interval terbuka tak hingga digambarkan dalam ruas garis berikut ini.



Gambar 1.5 Interval Terbuka Tak Hingga

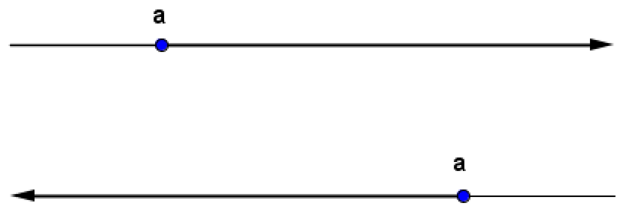
Jenis interval 7 dan 8

Interval tertutup tak hingga yang dapat direpresentasikan dalam notasi berikut.

$$[a, \infty) = \{x|x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x|x \leq a\}$$

Masing-masing bentuk interval tertutup tak hingga digambarkan dalam ruas garis berikut ini.



Gambar 1.6 Interval Terbuka Tak Hingga

Jenis interval 9

Himpunan semua bilangan real R dapat direpresentasikan dalam bentuk notasi $(-\infty, \infty)$ dan ruas garis berikut.

Gambar 1.7 Interval Bilangan real

Penerapan Interval

Dalam kehidupan sehari-hari kita banyak menemukan penggunaan interval. Misalnya seorang pengusaha bengkel memiliki rentang penghasilan setiap harinya berkisar antara Rp. 300.000,- dan Rp. 500.000,-. Kisaran penghasilan tersebut dapat direpresentasikan dalam notasi interval sebagai berikut:

$$(300000,500000) = \{x|300000 < x < 500000, x \in R\}$$

Serta dapat direpresentasikan dalam ruas garis:

Gambar 1.8 Interval (300000,5000000)

Contoh lainnya, misalkan seorang pegawai bengkel motor setiap harinya memperbaiki kendaraan yang bermasalah. Kecepatan bekerja pegawai tersebut biasanya mulai dari 30 menit samapai 1 jam untuk perbaikan satu motor. Interval waktu karyawan tersebut dapat dinyatakan dalam notasi interval dalam satuan menit yaitu:

$$[30,60] = \{x|30 \leq x \leq 60, x \in R\}$$

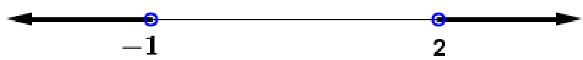
Serta dapat direpresentasikan dalam ruas garis:

Gambar 1.9 Interval [30,60]

Dapatkah kalian memberi contoh penggunaan interval dalam bidang teknik dan bisnis sepeda motor?

Gabungan Beberapa Interval

Selanjutnya, pada suatu garis real mungkin saja terdiri dari beberapa interval. Perhatikan Gambar 1.10 berikut ini.



Gambar 1.10 Interval $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Gambar 1.10 menunjukkan dua interval. Kedua interval tersebut dapat direpresentasikan dalam notasi kurung maupun pembentuk-himpunan berikut:

$$(-\infty, -1) \cup (2, \infty) = \{x | x < -1 \text{ atau } x > 2\}$$

Perhatikan Gambar 1.11 berikut.

Gambar 1.11 Interval $(-\infty, -5) \cup [-2,1] \cup (3, \infty)$

Gambar 1.11 menunjukkan tiga interval. Ketiga interval tersebut dapat direpresentasikan dalam notasi kurung maupun pembentuk-himpunan berikut:

$$(-\infty, -5) \cup [-2,1] \cup (3, \infty) = \{x | x < -1 \text{ atau} - 2 \leq x \leq 1 \text{ atau } \ x > 2\}$$

Soal Latihan

Untuk semua bilangan real R.

1. Nyatakan interval berikut dalam bentuk notasi pembentuk-himpunan.
   a. $(-3{,}5)$
   b. $(-5{,}0]$
   c. $[\sqrt{2}, \infty)$

2. Nyatakan interval berikut dalam bentuk notasi kurung dan pembentuk-himpunan.

   a. 

   b. 

   c. 

3. Nyatakan interval berikut dalam bentuk ruas garis
   a. $\{x|x > 0{,}37\}$
   b. $\{x| -4 < x \leq 7\}$
   c. $\{x|x \leq -5\}$

4. Seorang pengendara mengendarai sepeda motornya dengan kecepatan minimal 20 km/jam dan kecepatan maksimalnya kurang dari dari 60 km/jam. Tentukan kisaran kecepatan tersebut dalam bentuk notasi kurung, pembentuk-himpunan, dan ruas garis.

B Sifat Urutan Bilangan Real

Bilangan real dilambangkan dengan R. Bilangan real memiliki sifat urutan. Pada bagian ini akan diberikan sifat-sifat urutan yang akan digunakan pada pertidaksamaan dan nilai mutlak.

Terdapat himpunan bagian tidak kosong *P* dari R yaitu bilangan real positif yang memenuhi sifat berikut:

1) Jika *a,b* elemen-elemen di *P* maka *a+b* di *P*.
2) Jika *a,b* elemen-elemen di *P* maka *ab* di *P*.
3) Jika $a \in \mathrm{R}$ maka tepat satu pernyataan berikut yang dipenuhi: $a \in P, a = 0, -a \in P$.

Sifat 3) disebut sifat trikotomi.

Misalkan terdapat suatu himpunan bagian tidak kosong *P* dari R. Himpunan $P = (-7,6)$. *P* memiliki anggota tak terhingga banyaknya.

Misalkan terdapat bilangan 1 dan 4 yang merupakan elemen atau anggota dari *P*, maka

$$1 + 4 = 5 \in P$$

dan

$$1(4) = 4 \in P$$

Jika $a \in P$ maka ditulis $a > 0$ dan disebut bilangan real positif
Jika $a \in P \cup \{0\}$ maka ditulis $a \geq 0$ dan disebut bilangan real tak negatif
Jika $-a \in P$ maka ditulis $a < 0$ dan disebut bilangan real negatif
Jika $-a \in P \cup \{0\}$ ditulis $a \leq 0$ dan disebut bilangan real tak positif

Sifat-sifat urutan berikut ini sering digunakan dalam penyelesaian pertidaksamaan.

Misal $a, b, c \in R$

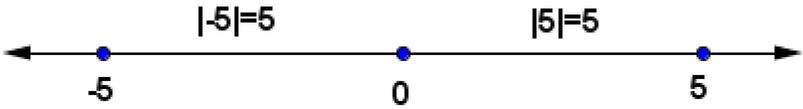
1) Jika $a - b \in P$ jika dan hanya jika $a > b$ atau $b < a$.
2) Jika $a - b \in P \cup \{0\}$ jika dan hanya jika $a \geq b$ atau $b \leq a$.
3) $a < b < c$ jika dan hanya jika $a > b$ atau $b < c$.
4) $a \leq b \leq c$ jika dan hanya jika $a \geq b$ atau $b \leq c$.

Misal $a, b, c \in R$

1) Jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$
2) Jika $a > b$ maka $a + c > b + c$
3) Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka $ca > cb$
4) Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka $ca < cb$
5) Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} < 0$.
6) Jika $a < 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.

C Nilai Mutlak

Perhatikan Gambar 1.12 berikut ini.



Gambar 1.12 Garis Real yang Merepresentasikan Nilai Mutlak

Gambar 1.12 merupakan sebuah garis real yang memiliki titik acuan O dan disebut titik asal. Pada Gambar 1.12 titik acuannya bilangan real 0.

Berapakah jarak antara titik acuan dengan bilangan di sebelah kanan dan kirinya?.

Jarak ke kanan dan ke kiri adalah sama yaitu 5 satuan. Jarak senantiasa positif atau nol. Bilangan nol memberi arti kedudukannya tetap atau tidak berubah. Jarak merupakan cara yang paling bermakna untuk merepresentasikan nilai mutlak.

Nilai mutlak dilambangkan dengan tanda dua-pagar, contohnya:

$$|0| = 0$$

$$|5| = 5$$

$$|-5| = -(-5)$$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

$$|-0{,}237| = -(-0{,}237)$$

$$|-2| = 2$$

$$\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2$$

$$|\pi - 4| = 4 - \pi$$

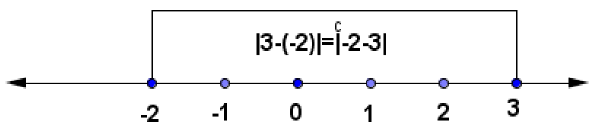
Secara umum, kita dapat menuliskan definisi nilai mutlak sebagai berikut.

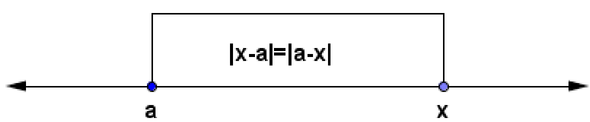
Definisi
Misalkan $a \in \mathbb{R}$, nilai mutlak dari a dinyatakan oleh $\lvert a \rvert$, didefinisikan sebagai berikut: $$\lvert a \rvert = \begin{cases} a, & \text{jika } a > 0 \\ 0, & \text{jika } a = 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Seringkali juga nilai mutlak didefinisikan dalam bentuk

$$\lvert a \rvert = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Selanjutnya, perhatikan Gambar 1.13 berikut ini.





Gambar 1.13 Jarak Antara Dua Titik

Gambar 1.13 menunjukkan jarak sebarang dua titik (a dan x) yang dapat direpresentasikan dalam bentuk nilai mutlak, yaitu $\lvert x - a \rvert$ yang sama dengan $\lvert a - x \rvert$.

Gambar 1.13 juga dapat dikatakan panjang ruas garis yaitu $\lvert x - a \rvert$.

Nilai mutlak memiliki sifat-sifat operasi yang disajikan pada tabel berikut.

Sifat-sifat Nilai Mutlak
Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{Z}$, maka 1. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$ 2. $\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$; $b \neq 0$ 3. $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n$ 4. $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$

Sekarang, kita pilih sebarang bilangan real yaitu $a = 6$, $a = -2$, serta sebarang bilangan bulat $n = 3$. Dengan menggunakan sifat-sifat nilai mutlak:

1. $|ab| = |a||b|$
   $\Leftrightarrow |6(-2)| = |6||-2|$
   $\Leftrightarrow |-12| = 6 \cdot 2$
   $\Leftrightarrow 12 = 12$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
   $\Leftrightarrow \left|\frac{6}{-2}\right| = \frac{|6|}{|-2|}$
   $\Leftrightarrow |-3| = \frac{6}{2}$
   $\Leftrightarrow 3 = 3$
3. $|a^n| = |a|^n$
   $\Leftrightarrow |6^3| = |6|^3$
   $\Leftrightarrow |216| = 6^3$
   $\Leftrightarrow 216 = 216$
4. $\sqrt{a^2} = |a|$
   $\Leftrightarrow \sqrt{6^2} = |6|$
   $\Leftrightarrow 6 = 6$

Soal Latihan

1. Misalkan terdapat bilangan-bilangan yang merupakan anggota dari bilangan real.
   a. Nilai mutlak dari 2 adalah 2. Tuliskan dalam lambang nilai mutlak.
   b. Nilai mutlak dari -*x* adalah *x*. Tuliskan dalam bentuk nilai mutak.
2. Tulislah bentuk-bentuk berikut tanpa menggunakan nilai mutlak.
   a. $|7-13|$
   b. $|\pi-\sqrt{5}|$
   c. $|8|-|-5|$

D Persamaan Linear Satu Variabel

Pada tingkat sekolah menengah pertama kita sudah mengenal persamaan linear satu variabel. Identifikasi bentuk-bentuk persamaan berikut. Manakah persamaan yang termasuk persamaan linear satu variabel? Jelaskan.

1) $5x = 100$
2) $x + 1 = 5$
3) $x + 1 = x - 5$
4) $y = \frac{100}{7}$
5) $2x + y = 4$
6) $y = x - 5$
7) $x^2 = 7$
8) $x + x^2 = 7$
9) $x^2 - y = 5$
10) $x^2 + y^2 = 36$

Persamaan linear satu variabel merupakan persamaan yang memiliki satu variabel dengan pangkat satu. Penyelesaian persamaan linear satu variabel adalah menentukan nilai variabel tersebut sehingga memenuhi persamaan yang ditentukan.

Misalkan terdapat bentuk persamaan-persamaan berikut:

1) $x + 5 = 9$
2) $3x + 5 = x + 9$

Persamaan 1) dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat operasi aljabar yaitu dengan menambahkan -5 pada masing-masing ruas sehingga diperoleh $x = 4$.

Persamaan 2) dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat operasi aljabar yaitu dengan menambahkan -5 dan $-x$ pada masing-masing ruas sehingga diperoleh $2x = 4$. Kemudian masing-masing ruas dikali dengan $\frac{1}{2}$ sehingga diperoleh $x = 2$.

Bentuk linear satu variabel dapat berbentuk nilai mutlak. Misalnya $|x - 1|$. Kita akan menuliskan bentuk tersebut tanpa menggunakan lambang nilai mutlak.

Berdasarkan definisi nilai mutlak, kita dapat menuliskan:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{jika } x-1>0 \\ 0, & \text{jika } x-1=0 \\ -(x-1), & \text{jika } x-1<0 \end{cases}$$

atau

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{jika } x>1 \\ 0, & \text{jika } x=1 \\ 1-x, & \text{jika } x<1 \end{cases}$$

Soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian bentuk-bentuk persamaan berikut.
   a. $3z+5=9-z$
   b. $5y-y=50+9y$
   c. $\frac{2}{7}y+\sqrt{2}=4$
2. Tulislah dalam bentuk tanpa nilai mutlak.
   a. $|x+2|$
   b. $|2x-1|$

E Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Pertidaksamaan atau ketaksamaan linear satu variabel pasti sudah kalian kenal di sekolah menengah pertama. Masih ingatkah bentuk pertidaksamaan linear satu variabel? Berikan contohnya.

Penyelesaian pertidaksamaan linear satu variabel merupakan himpunan penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan yang berikan.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari peridaksamaan yang diberikan dan gambarkan himpunan tersebut dalam garis real atau ruas garis.

1) $5x + 2 > x - 6$
2) $13 > 2x - 3 > 5$
3) $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$

Penyelesaian:

1) $5x + 2 > x - 6$
   $\Leftrightarrow 5x - x > -6 - 2$
   $\Leftrightarrow 4x > -8$
   $\Leftrightarrow x > -2$

2) $13 > 2x - 3 > 5$
   $\Leftrightarrow 13 + 3 > 2x > 5 + 3$
   $\Leftrightarrow 16 > 2x > 8$
   $\Leftrightarrow 8 > x > 4$
   $\Leftrightarrow 4 < x < 8$

3) $\frac{4}{x} - 3 > \frac{2}{x} - 7$
   $\Leftrightarrow \frac{4}{x} - \frac{2}{x} > -7 + 3$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} > -4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + 4 > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2 + 4x}{x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x + \frac{1}{2}}{x} > 0$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ atau } x > 0$$

Soal Latihan

Tentukan himpunan penyelesaian dari peridaksamaan yang diberikan dan gambarkan himpunan tersebut dalam garis real atau ruas garis.

1) $3 - x \leq 5 + 3x$
2) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$
3) $3x - 5 < \frac{3}{4}x + \frac{1-x}{3}$
4) $2 \leq 5 - 3x < 11$
5) $2 \geq -3 - 3x \geq -7$
6) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

F Bentuk Kuadrat dan Persamaan Kuadrat

x^2, $(x-1)^2$, dan $(3x+2)^2$ merupakan contoh dari bentuk kuadrat. Bentuk ini dapat diuraikan menjadi:

$$x^2 = xx$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

Penguraian bentuk pangkat tersebut sudah kalian pelajari di tingkat SLTP. Keterampilan menguraikan bentuk pangkat akan sangat mendukung penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel yang akan dipelajari pada bagian berikutnya.

Selanjutnya, persamaan kuadrat, masih ingat bentuk-bentuk persamaan kuadrat berikut?

1) $x^2 = 7$
2) $x + x^2 = 7$
3) $x^2 + 2x - 7 = 0$
4) $(x+1)^2 = 0$
5) $(2x+3)^2 = 5$

Bagaimana penyelesaian bentuk persamaan kuadrat tersebut?

Di tingkat SLTP kita sudah mengenal cara menentukan penyelesaian persamaan kuadrat yaitu dengan cara pemfaktoran. Apakah kalian mengetahui teknik penyelesaian yang lainnya?

Pada pembahasan ini, persamaan kuadrat akan digunakan untuk mendukung penyelesaian pada persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Keterampilan menyelesaikan persamaan kuadrat dengan teknik pemfaktoran menjadi fokus keterampilan yang akan dipelajari pada bagian ini.

Pemfaktoran mengikuti sifat perkalian berikut.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ atau } b = 0$$

Penyelesaian persamaan kuadrat biasa disebut juga "menentukan akar-akar persamaan kuadrat".

Contoh

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut.

1) $(x-2)(3x-5)=0$
2) $4x^2=36$
3) $(x-1)^2=0$
4) $(2x+3)^2=0$
5) $x^2-2x+1=0$
6) $2x^2+3x+1=0$

Penyelesaian:

1) Bentuk $(x-2)(3x-5)=0$ sudah dalam bentuk faktor, maka berdasarkan sifat perkalian,
   $(x-2)(3x-5)=0$
   $\Leftrightarrow (x-2)=0$ atau $(3x-5)=0$
   $\Leftrightarrow x=2$ atau $3x=5$
   $\Leftrightarrow x=2$ atau $x=\frac{5}{3}$

2) Bentuk $4x^2=36$ dapat diselesaikan dengan beberapa cara, dua diantaranya dijelaskan berikut ini.
   Cara pertama menggunakan sifat pangkat,
   $\Leftrightarrow 4x^2=36$
   $\Leftrightarrow x^2=9$
   $\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}$
   $\Leftrightarrow x=\pm 3$
   $\Leftrightarrow x=3$ atau $x=-3$.
   Cara kedua menggunakan pemfaktoran,
   $4x^2=36$
   $\Leftrightarrow 4x^2-36=0$
   $\Leftrightarrow x^2-9=0$
   $\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0$
   $\Leftrightarrow (x-3)=0$ atau $(x+3)=0$
   $\Leftrightarrow x=3$ atau $x=-3$.

3) Bentuk $(x-1)^2 = 0$ merupakan bentuk faktor, dengan mudah kita dapat menyelesaikannya.

$(x-1)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) = 0 \;\; atau \;\; (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

4) Bentuk $(2x+3)^2 = 0$ merupakan bentuk faktor, dengan mudah kita dapat menyelesaikannya

$(2x+3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+3) = 0 \;\; atau \;\; (2x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

5) Dengan pemfaktoran dan menggunakan sifat perkalian,

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) = 0 \;\; atau \;\; (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

6) Dengan pemfaktoran dan menggunakan sifat perkalian,

$2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1) = 0 \;\; atau \;\; (x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \;\; atau \;\; x = -1$

Soal Latihan

1. Tentukan penyelesaian persamaan berikut ini.
   a. $1 - x - 2x^2 = 0$
   b. $4x^2 + 9x = 9$
   c. $x^2 - 3x + 2 = 0$
2. Uraikan bentuk kuadrat berikut ini.
   a. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
   b. $\left(2x - \sqrt{3}\right)^2$
   c. $\frac{1}{2}\left(4x - \frac{6}{5}\right)^2$

G Pertidaksamaan Kuadrat

Pada bagian ini, pertidaksamaan kuadrat merupakan konsep yang akan digunakan dalam penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Keterampilan menyelesaikan peridaksamaan kuadrat dalam hal ini menentukan himpunan penyelesaian merupakan fokus keterampilan dalam pembelajaran kali ini.

Contoh

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut.

1. $(x-2)(3x-5) > 0$
2. $2x^2 + 3x \leq -1$

Penyelesaian:

1. $(x-2)(3x-5) > 0$
   Kita tahu bahwa persamaan $(x-2)(3x-5) = 0$ memiliki akar-akar 2 dan $\frac{5}{3}$. Bilangan 2 dan $\frac{5}{3}$ membagi garis real menjadi tiga interval yaitu:
   $$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, 2\right), (2, \infty)$$
   Digambarkan berikut ini.
   

   Untuk menentukan interval penyelesaian, maka dilakukan nilai uji pada pertidaksamaan kuadrat.
   Misalkan dipilih nilai pada $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ yaitu 1, sehingga:
   $$(1-2)(3(1)-5) > 0.$$
   Pernyataan tersebut benar, artinya interval tersebut penyelesaian pertidaksamaan.
   Misalkan dipilih nilai pada $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ yaitu $\frac{7}{4}$, sehingga:
   $$\left(\frac{7}{4} - 2\right)\left(3(\frac{7}{4}) - 5\right) > 0.$$
   Pernyataan tersebut salah, artinya interval tersebut bukan penyelesaian pertidaksamaan.
   Misalkan dipilih nilai pada $(2, \infty)$ yaitu 3, sehingga:
   $$(3-2)(3(2)-5) > 0.$$
   Pernyataan tersebut benar, artinya interval tersebut penyelesaian pertidaksamaan.
   Kesimpulann:

Penyelesaian pertidaksamaan $(x-2)(3x-5) > 0$ adalah $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ atau $(2, \infty)$ yang dapat direpresentasikan dalam bentuk notasi pembentuk himpunan $\left\{x | x < \frac{5}{3} \text{ atau } x > 2, x \in R\right\}$.

2. Bentuk $2x^2 + 3x \leq -1$ diubah ke dalam bentuk $2x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
   $2x^2 + 3x + 1$ difaktorkan menjadi $(2x+1)(x+1)$
   Kita tahu bahwa persamaan $(2x+1)(x+1) = 0$ memiliki akar-akar -1 dan $-\frac{1}{2}$. Bilangan -1 dan $-\frac{1}{2}$membagi garis real menjadi tiga interval yaitu:
   $$(-\infty, -1], \left[-1, -\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$
   Digambarkan berikut ini.

   Untuk menentukan interval penyelesaian, maka dilakukan nilai uji pada pertidaksamaan kuadrat.
   Misalkan dipilih nilai pada $(-\infty, -1]$ yaitu -2, sehingga:
   $$(2(-2)+1)((-2)+1) \leq 0.$$
   Pernyataan tersebut salah, artinya interval tersebut bukan penyelesaian pertidaksamaan.
   Misalkan dipilih nilai pada $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ yaitu $-\frac{2}{3}$, sehingga:
   $$\left(2(-\frac{2}{3})+1\right)\left((-\frac{2}{3})+1\right) \leq 0.$$
   Pernyataan tersebut benar, artinya interval tersebut penyelesaian pertidaksamaan.
   Misalkan dipilih nilai pada $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ yaitu 0, sehingga:
   $$(2(0)+1)((0)+1) \leq 0.$$
   Pernyataan tersebut salah, artinya interval tersebut bukan penyelesaian pertidaksamaan.
   Kesimpulann:
   Penyelesaian pertidaksamaan $2x^2 + 3x + 1 \leq 0$ adalah $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ yang dapat direpresentasikan dalam bentuk notasi pembentuk himpunan
   $\left\{x | -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, x \in R\right\}$.

Soal Latihan

Tentukan penyelesaian persamaan berikut ini.

1. $1 - x - 2x^2 \leq 0$
2. $4x^2 + 9x > 9$
3. $x^2 - 3x + 2 < 0$

2 PERSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL

Kompetensi, Tujuan Instruksional, dan Peta Konsep

Persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel merupakan bagian materi yang terdapat pada kompetensi dasar, yaitu:

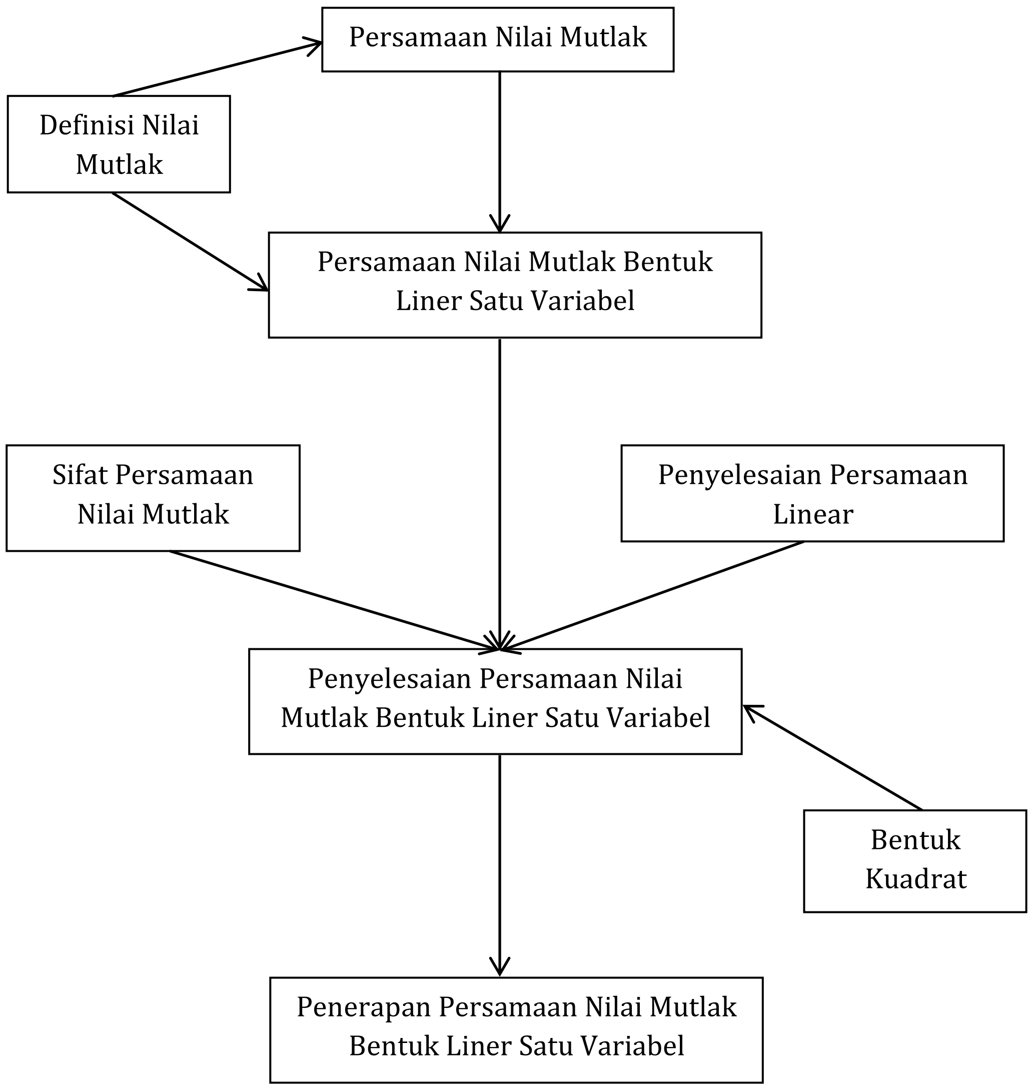
3.2. menerapkan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

4.2. menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

Berdasarkan kompetensi tersebut ditetapkan tujuan pembelajaran "Persamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel" adalah sebagai berikut:

1. Melalui pendekatan konteks TBSM peserta didik dapat mendapatkan pengetahuan dan pemahaman konsep-konsep persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.
2. Peserta didik dapat menerapkan konsep-konsep persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel untuk menyelesaikan masalah dalam konteks TBSM atau konteks lainnya.

Penguasaan pengetahuan dan keterampilan peserta didik terhadap persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel digambarkan dalam peta konsep berikut ini.



Gambar 2.1 Peta Konsep Penyelesaian dan Penerapan Persamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel

A PERSAMAAN NILAI MUTLAK

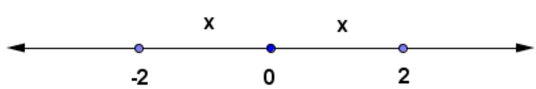
Kita sudah memahami bahwa $|2| = 2$ atau $|-2| = 2$. Jika nilai mutlak dari 2 atau –2 diwakili oleh suatu variabel x, maka kita dapat menuliskan dengan $|x| = 2$. Bentuk $|x| = 2$ merupakan persamaan nilai mutlak satu variabel. Secara umum, nilai mutlak memiliki sifat sebagai berikut.

Sifat
Misalkan $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, maka: $|x| = a$ jika dan hanya jika $x = \pm a$

Nilai mutlak dapat dimaknai sebagai jarak. Perhatikan ilustrasi berikut:

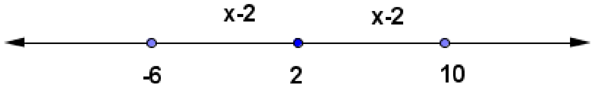
Seorang peserta didik SMK setiap harinya menempuh perjalanan 2 km ke sekolah. Sekolahnya berada di sebelah utara rumahnya. Peserta didik tersebut juga ditugaskan untuk praktek kerja di sebuah bengkel. Jarak dari rumah ke bengkel sama dengan jarak dari rumahnya ke sekolah, namun arahnya berbanding terbalik dengan arah dari rumahnya ke sekolah. Jika jarak dari rumah ke sekolah atau jarak dari rumah ke bengkel dilambangkan dengan variabel x, maka dapat ditulis $x = 2$ atau $x = -2$. Masalah tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan nilai mutlak, $|x| = 2$.

Rumah dalam ilustrasi tersebut sebagai titik acuan O yiatu 0, sehingga ilustrasi tersebut dapat digambarkan garis real berikut.



Gambar 2.2 Ilustrasi Nilai Mutlak Titik Acuan Nol

Bagaimana kalau titik acuan O bukan nol? Bagaimana merepresentasikannya dalam bentuk nilai mutlak? Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.3 Ilustrasi Nilai Mutlak Titik Acuan Dua

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa nilai $|x-2|=8$, yaitu:

$$x=|10-2|\ =|2-10| \text{ atau } x=|-6-2|\ =|2-(-6)|$$

Jika kita memandang tiga buah titik pada garis real (Gambar 2.3) sebagai nilai minimum, nilai tengah, dan nilai maksimum. Maka kita dapat menuliskan nilai maksimum atau minimum terhadap nilai tengahnya dalam bentuk nilai mutlak $|x-2|=8$. Dengan x merupakan nilai tertinggi atau terendah dan 8 merupakan jarak antara nilai maksimum atau minimum dengan nilai tengahnya. Berikut ini uraiannya:

Misalkan nilai maksimum adalah $x=10$ sehingga nilai maksimum terhadap nilai tengahnya dinyatakan dengan

$$x-2=10-2 \Leftrightarrow x-2=8 \qquad (1)$$

dan nilai minimum adalah $x=-6$ sehingga nilai minimum terhadap nilai tengahnya dinyatakan dengan

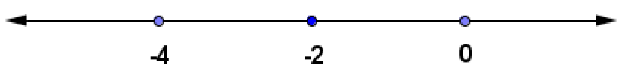
$$x-2=-6-2 \Leftrightarrow x-2=-8 \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), kita dapat menuliskan dalam bentuk nilai mutlak menjadi:

$$|x-2|=8$$

Sesuai dengan judul pada sub topik ini, kita sudah mendapatkan satu bentuk $|x-2|=8$ yang merupakan satu contoh dari bentuk persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel, dengan $x-2$ merupakan bentuk linear satu variabel. Dapatkah kalian memberi contoh bentuk persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel yang lainnya?

Perhatikan Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.4 Ilustrasi Nilai Mutlak Titik Acuan Bilangan Negatif

Gambar 2.4 dapat direpresentasikan dalam bentuk nilai mutlak,

$$|x+2|=2$$

B Penyelesaian Persamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel

Selanjutnya, kita akan menentukan penyelesaian nilai mutlak yaitu menentukan suatu nilai sehingga memenuhi persamaan yang diberikan. Penyelesaian nilai mutlak dilakukan dengan menggunakan sifat:

$$|x| = a \text{ jika dan hanya jika } x = \pm a$$

untuk $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Contoh:

1. Tentukan nilai dari x dari persamaan-persamaan berikut:
   a. $|x| = 7$
   b. $|x| = \sqrt{5}$
   c. $|x+1| = 5$
   d. $|5-2x| = 11$
   e. $|5x-3| = |3x+5|$
   f. $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4, x \neq \frac{3}{2}$

Penyelesaian:

a. Penyelesaian $|x| = 7$ dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak yaitu:

$$|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7 \text{ atau } x = -7.$$

b. Penyelesaian $|x| = \sqrt{5}$ dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak yaitu:

$$|x| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ atau } x = -\sqrt{5}.$$

c. Penyelesaian $|x+1| = 5$ dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak yaitu:

$$|x+1| = 5$$
$$\Leftrightarrow x+1 = 5 \text{ atau } x+1 = -5$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ atau } x = -6$$

d. Penyelesaian $|5-2x| = 11$ dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak yaitu:

$$|5-2x| = 11$$
$$\Leftrightarrow 5-2x = 11 \text{ atau } 5-2x = -11$$
$$\Leftrightarrow -2x = 6 \text{ atau } -2x = -16$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ atau } x = 8$$

e. Penyelesaian $|5x-3| = |3x+5|$ dengan menggunakan sifat kuadrat nilai mutlak yaitu:

$$|5x-3| = |3x+5|$$
$$\Leftrightarrow |5x-3|^2 = |3x+5|^2$$
$$\Leftrightarrow (5x-3)^2 = (3x+5)^2$$
$$\Leftrightarrow 25x^2 - 30x + 9 = 9x^2 + 30x + 25$$
$$\Leftrightarrow 25x^2 - 9x^2 - 30x - 30x + 9 - 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 60x - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x+1)(x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x+1) = 0 \text{ atau } \Leftrightarrow (x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ atau } \Leftrightarrow x = 4$$

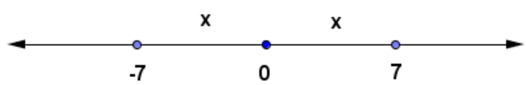
f. Penyelesaian $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$ dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak yaitu:

$$\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x+8}{2x-3} = 4 \text{ atau } \frac{3x+8}{2x-3} = -4$$
$$\Leftrightarrow 3x+8 = 4(2x-3) \text{ atau } 3x+8 = -4(2x-3)$$
$$\Leftrightarrow 3x+8 = 8x-12 \text{ atau } 3x+8 = -8x+12$$
$$\Leftrightarrow 3x-8x = -12-8 \text{ atau } 3x+8x = 12-8$$
$$\Leftrightarrow -5x = -20 \text{ atau } 11x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ atau } x = \frac{4}{11}$$

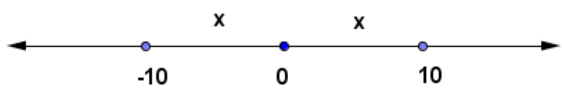
2. Gambarkan bentuk nilai pangkat berikut dalam garis bilangan:
   a. $|x| = 7$
   b. $|x| - 3 = 7$
   c. $|x + 1| = 5$
   d. $|5 - 2x| = 11$

   Penyelesaian:

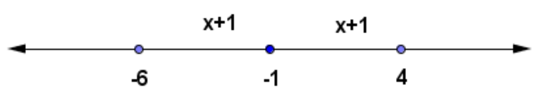
   a. $|x| = 7$ memiliki titik pangkal 0 dengan $x = 7$ dan $x = 7$, digambarkan sebagai berikut:



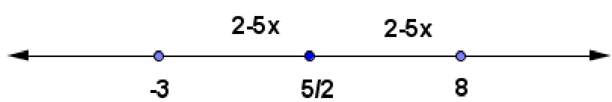
   b. $|x| - 3 = 7 \Leftrightarrow |x| = 10$ memiliki titik pangkal 0 dengan $x = 10$ dan $x = -10$, digambarkan sebagai berikut:



   c. $|x + 1| = 5$ memiliki titik pangkal -1 dengan $x = 4$ dan $x = -6$, digambarkan sebagai berikut:



   d. $|5 - 2x| = 11$ memiliki titik pangkal 2,5 dengan $x = -3$ dan $x = 8$, digambarkan sebagai berikut:



3. Seorang pedagang sayuran berkeliling menjajakan dagangannya dengan mengendarai motor setiap harinya sampai semua dagangannya habis. Ia menempuh perjalanan paling jauh 30 km, paling dekat 10 km, dan rata-rata 20 km. Nyatakan masalah tersebut dalam bentuk persamaan nilai mutlak yang merepresentasikan jarak terdekat atau terjauh perjalanan pedagang terhadap rata-ratanya setiap hari.

   Penyelesaian:
   Misalkan jarak tempuh terjauh adalah $x = 30$ sehingga jarak terjauh terhadap rata-ratanya dinyatakan dengan

$$x - 20 = 30 - 20 \Leftrightarrow x - 20 = 10 \qquad (1)$$

dan jarak tempuh terdekat adalah $x = 10$ sehingga jarak terdekat terhadap rata-ratanya dinyatakan dengan

$$x - 20 = 10 - 20 \Leftrightarrow x - 20 = -10 \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), kita dapat menuliskan dalam bentuk nilai mutlak menjadi:

$$|x - 20| = 10$$

4. Kecepatan rata-rata piston adalah 500 LN. selisih kecepatan rata-rata piston dengan kecepatan maksimum atau minimumnya adalah 200 LN.
   a. Nyatakan pernyataan tersebut dalam bentuk persamaan nilai mutlak.
   b. Tentukan kecepatan maksimum dan minimum kecepatan piston tersebut.

   Penyelesaian:

   a. Misalkan x adalah kecepatan maksimum atau minimum piston. selisih kecepatan maksimum atau minimum piston dengan kecepatan rata-ratanya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan nilai mutlak:
   $$|x - 500| = 200$$
   b. Kecepatan maksimum piston 700 LN, karena:
   $$x - 500 = 200 \Leftrightarrow x = 700$$
   dan kecepatan minimum kecepatan piston 300 LN, karena :
   $$x - 500 = -200 \Leftrightarrow x = 300$$

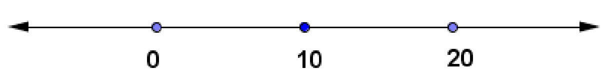
C SOAL LATIHAN

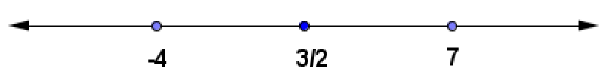
1. Misalkan terdapat bilangan-bilangan yang merupakan anggota dari bilangan real.
    a. Nilai mutlak dari -7 adalah 7. Tuliskan dalam lambang nilai mutlak.
    b. Nilai mutlak dari -a adalah a. Tuliskan dalam bentuk nilai mutak.

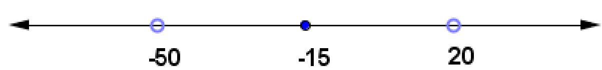
2. Manakah dari bentuk berikut yang termasuk bentuk bentuk persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.
    a. $|y| = 125$
    b. $|y| - |2| = 0$
    c. $|y| + 3 = 7$
    d. $|4y| = |2|$
    e. $|y^2| = 0$
    f. $|y + 2| = 0$
    g. $|2y^2 + 9y| = 13$
    h. $|3y - 5| = 4$
    i. $|y - 5| = |y + 8|$
    j. $\left|\frac{y+5}{3y-1}\right| = 9, x \neq \frac{1}{3}$

3. Gambarkan bentuk berikut dalam garis bilangan:
    a. $|2x + 1| = 17$
    b. $|x - 500| = 300$
    c. $|100 - 2x| = 30$

4. Nyatakan gambar berikut ini dalam bentuk representasi nilai mutlak.

a. 

b. 

c. 

5. Tentukan nilai dari *x* dari persamaan-persamaan berikut:
   a. $|x| = \sqrt{625}$
   b. $|x| = \frac{2}{3}$
   c. $|x| = 10^3$
   d. $|x| = 4^{-7}$
   e. $|5 - 2x| = 0{,}25$
   f. $|4x + 3| = 7$
   g. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$
   h. $|x - 2| = |3 - 2x|$

5. Putaran mesin suatu motor rata-rata adalah 5000 rpm. Putaran mesin dapat dinaikkan atau diturunkan sebesar 1000 rpm.
   a. Gambarkan pernyataan tersebut dalam garis bilangan.
   b. Nyatakan pernyataan tersebut dalam bentuk persamaan nilai mutlak.
   c. Tentukan putaran mesin maksimum dan minimum.

6. Elektroda busi harus dipertahankan pada suhu kerja yang tepat, yaitu antara 400^0C sampai 800^0C, dengan rata-rata suhu 600^0C.
   a. Nyatakan masalah tersebut dalam bentuk persamaan nilai mutlak yang merepresentasikan suhu terendah dan tertinggi terhadap suhu rata-ratanya setiap.
   b. Berapakah selisih suhu terendah dan tertinggi terhadap rata-rata suhu elektroda busi?

3 PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL

Kompetensi, Tujuan Instruksional, dan Peta Konsep

Pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel merupakan bagian materi yang terdapat pada kompetensi dasar, yaitu:

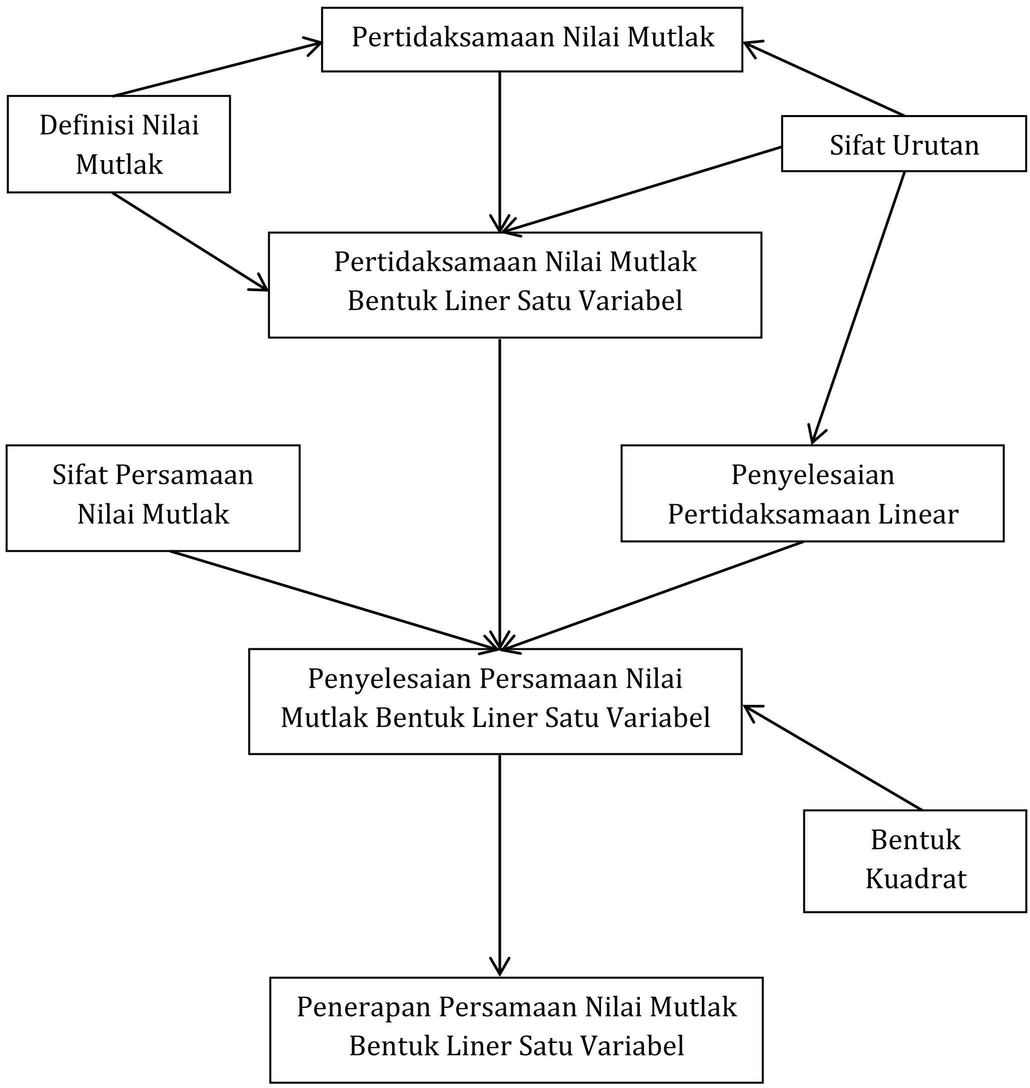
3.2. menerapkan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

4.2. menyajikan penyelesaian masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

Berdasarkan kompetensi tersebut ditetapkan tujuan pembelajaran "Perstidaksamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel" adalah sebagai berikut:

1. Melalui pendekatan konteks TBSM peserta didik dapat mendapatkan pengetahuan dan pemahaman konsep-konsep pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.
2. Peserta didik dapat menerapkan konsep-konsep pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel untuk menyelesaikan masalah dalam konteks TBSM atau konteks lainnya.
3. Peserta didik dapat membedakan penerapan persamaan atau pertidaksamaan nilai mutlak dari konteks yang diberikan pada tugas.

Penguasaan pengetahuan dan keterampilan peserta didik terhadap pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel digambarkan dalam peta konsep berikut ini.

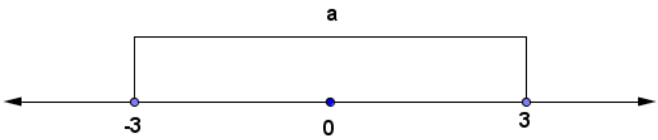


Gambar 3.1 Peta Konsep Penyelesaian dan Penerapan Pertidaksamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel

A Pertidaksamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel

Sekarang kita akan mempelajari pertidaksamaa nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Bentuk ini erat kaitannya denga interval dan sifat urutan.

Perhatikan Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Interval [-3,3]

a menunjukkan jarak antara -3 dan 3. Gambar 3.2 merepresentasikan sebuah interval (rentang atau jangkauan) dari a. Gambar 3.2 dapat juga direpresentasikan dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak mengikuti sifat (1) berikut.

Sifat
1. Jika $c > 0$, maka $\|a\| \leq c$, jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$ 2. Jika $c > 0$, maka $\|a\| \geq c$, jika dan hanya jika $a \leq -c$ atau $a \geq c$

Berdasarkan sifat urutan dan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, [-3,3] dapat direpresentasikan:

$$-3 \leq a \leq 3 \Leftrightarrow |a| \leq 3$$

Gambar 3.2 menunjukkan suatu interval dengan nilai maksimum 3, nilai minimum -3, dan titik pangkal 0. Bagaimana merepresentasikan pertidaksamaan nilai mutlak jika titik pangkal suatu interval bukan nol?.

Misalnya kecepatan seseorang mengendarai motor berkisar antara 0 sampai 80 km/jam dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Rentang kecepatan mengendarai motor *x* dapat dinyatakan dalam bentuk pertidaksaksamaan:

$$0 < x < 80$$

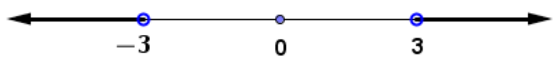
Karena kecepatan rata-ratanya 40, maka kita dapat menulis:

$$0 - 40 < x - 40 < 80 - 40 \Leftrightarrow -40 < x - 40 < 40 \Leftrightarrow |x - 40| < 40$$

yang memiliki makna bahwa selisih kecepatan maksimum dan minimum kendaraan berkisar 40 km/jam terhadap rata-rata kecepatannya.

Bentuk $|a| \leq 3$ dan $|x - 40| < 40$ merupakan contoh dari pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Dapatkan kalian memberikan contoh yang lainnya?

Selanjutnya kita bahas sifat (2) pertidaksamaan nilai mutlak. Perhatikan Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Interval $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

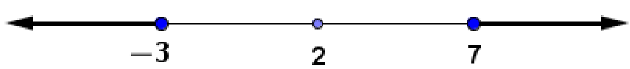
Interval tersebut memiliki titik pangkal 0 dan dapat dinyatakan dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak

$$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

$$\Leftrightarrow a < -3 \text{ atau } a > 3$$

$$\Leftrightarrow |a| > 3$$

Perhatikan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Interval $(-\infty, -3) \cup (7, \infty)$

Gambar 3.4 memiliki interval $(-\infty, -3) \cup (7, \infty)$ yang dapat direpresentasikan dalam bentuk ketaksamaan berikut.

$$a \leq -3 \text{ atau } a \geq 7$$

Karena interval tersebut memiliki titik pangkal 2, maka berdasarkan sifat urutan dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a - 2 \leq -3 - 2 \;\text{ atau } a - 2 \geq 7 - 2$$

$$\Leftrightarrow a - 2 \leq -5 \text{ atau } a - 2 \geq 5$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak diperoleh: $|a -| \geq 5$

B Penyelesaian Pertidaksamaan Nilai Mutlak Bentuk Linear Satu Variabel

Penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak adalah menentukan suatu suatu himpunan sedemikian sehingga memenuhi pertidaksamaan yang diberikan. Penyelesaian nilai mutlak dilakukan dengan menggunakan sifat:

Jika $c > 0$, maka $|a| \leq c$, jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$
Jika $c > 0$, maka $|a| \geq c$, jika dan hanya jika $a \leq -c$ atau $a \geq c$

Berikut diberikan beberapa contoh penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel beserta aplikasinya dalam konteks TBSM.

Contoh

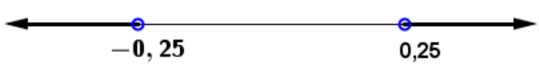
1. Selesaikan pertidaksamaan berikut ini.
   a. $|x| > 0{,}25$
   b. $|x + 2| < 5$
   c. $|6 - 2x| \geq 7$
   d. $|3x| > |6 - 3x|$
   e. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$

   Penyelesaian:

   a. Penyelesaian $|x| > 0{,}25$ menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu:

   $$|x| > 0{,}25 \Leftrightarrow x < -0{,}25 \text{ atau } x > 0{,}25$$

   dapat digambarkan,



   dapat juga dinyatakan dalam bentuk,

   $$(-\infty; -0{,}25) \cup (0{,}25; \infty)$$

   b. Penyelesaian $|x + 2| < 5$ menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu:

   $$|x + 2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x + 2 < 5$$
   $$\Leftrightarrow -7 < x < 3$$

dan dapat digambarkan,

dapat juga dinyatakan dalam bentuk,

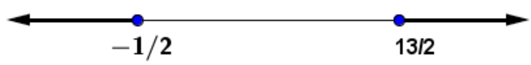
$$(-7,3)$$

c. Penyelesaian $|6-2x| \geq 7$ menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu:

$$|6-2x| \geq 7 \Leftrightarrow 6-2x \leq -7 \text{ atau } 6-2x \geq 7$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq -13 \text{ atau } -2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{13}{2} \text{ atau } x \leq -\frac{1}{2}$$

dan dapat digambarkan,



dapat juga dinyatakan dalam bentuk,

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right],\left[\frac{13}{2},\infty\right)$$

d. Penyelesaian $|3x| > |6-3x|$ menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu:

$$|3x| > |6-3x| \Leftrightarrow |3x|^2 > |6-3x|^2$$

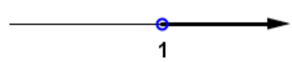
$$\Leftrightarrow (3x)^2 > (6-3x)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 > 9x^2 - 36x + 36$$

$$\Leftrightarrow 36x > 36$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

dan dapat digambarkan,



dapat juga dinyatakan dalam bentuk

$$(1,\infty)$$

e. Penyelesaian $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$ menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu:

$$\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 4$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{2x-3}\right|^2 < 4^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^2 < 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+4}{4x^2-12x-9} < 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+4}{4x^2-12x-9} - 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+4-16(4x^2-12x-9)}{(2x-3)^2} < 0$$

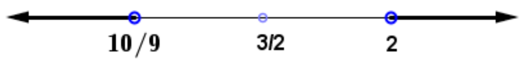
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+4x+4-64x^2+192x-144}{(2x-3)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-63x^2+196x-140}{(2x-3)^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2-28x+20}{(2x-3)^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(9x-10)(x-2)}{(2x-3)^2} > 0$$

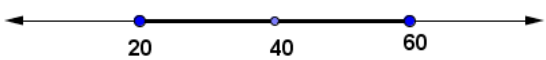
Kita peroleh tiga titik dan empat interval. Berdasarkan uji interval, diperoleh himpunan penyelesaian $\left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \cup (2, \infty)$



2. Seorang pengendara sepeda motor mengendarai motornya dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Kecepatan dapat berubah menyesuaikan keadaan jalanan yang dilewatinya. Namun, pengendara tersebut memiliki batas kecepatan maksimal dan minimal supaya sampai ditempat tujuan dengan tepat waktu. Kecepatan maksimal dan minimal berturut-turut adalah 20 km/jam dan 60 km/jam.
   a. Tuliskan masalah tersebut dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak.
   b. Berapa penurunan dan kenaikan kecepatan sepeda motor?

   Penyelesaian:

   Misalkan rentang kecepatan digambarkan sebagai berikut:



   Interval tersebut dapat dituliskan,

$$20 \le x \le 60$$

   Karena titik acuannya 40 adalah kecepatan rata-rata maka,

$$20 - 40 \le x - 40 \le 60 - 40$$
$$\Leftrightarrow -20 \le x - 40 \le 20$$

$$\Leftrightarrow |x - 40| \leq 20$$

Dengan menggunakan sifat ketaksamaan nilai mutlak diperoleh:

$$|x - 40| \leq 20.$$

a. Pertidaksamaan yang merepresentasikan masalah tersebut adalah $|x - 40| \leq 20$
b. Pertidaksamaan nilai mutlak $|x - 40| \leq 20$ memiliki makna kenaikan atau penurunan kecepatan terhadap rata-ratanya paling besar adalah 20 km/jam.

3. Pak Danu memiliki bengkel sepeda motor yang menyediakan jasa service. Rata-rata penghasilan Pak Danu dari bengkelnya adalah Rp. 1.500.000,- per hari. Penghasilan yang diperoleh setiap harinya dapat berubah-ubah bergantung pada keramaian arus lalu lintas. Penurunan dan kenaikan penghasilan harian tidak akan lebih dari Rp.500.000,- dari rata-rata penghasilan.
   a. Tentukan rentang atau jangkauan penghasilan jasa servis motor setiap harinya.
   b. Tentukan penghasilan tertinggi.
   c. Tentukan penghasilan terendah.

Penyelesaian:

Diketahui penghasilan rata-rata jasa servis motor adalah 1500000 dengan kenaikan atau penurunan penghasilan tidak akan lebih 500000 dari rata-rata penghasilannya. Pernyaataan tersebut dapat ditulis dapat ditulis,

$$|x - 1500000| \leq 500000$$

a. Berdasarkan pertidaksamaan nilai mutlak tersebut dapat diperoleh rentang penghasilan jasa servis motor berikut.

$$|x - 1500000| \leq 500000 \Leftrightarrow -500000 \leq x - 1500000 \leq 500000$$
$$\Leftrightarrow -500000 + 1500000 \leq x \leq 500000 + 1500000$$
$$\Leftrightarrow 1000000 \leq x \leq 2000000$$

Dapat ditulis,

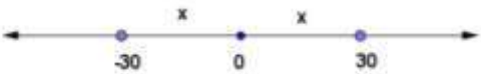
$$[1000000,2000000]$$

Bilangan di ujung selang (*end point*) menunjukkan penghasilan terendah dan tertinggi.

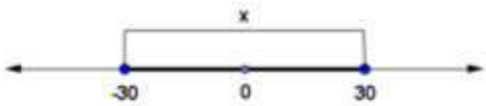
b. Berdasarkan (a), penghasilan tertinggi adalah Rp.2.000.000,-
c. Berdasarkan (a), penghasilan terendah adalah Rp.1.000.000,-

Kalian sudah mengetahui dan memahami persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Kalian juga sudah terampil menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel. Apakah kalian dapat membedakan persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel? Baik dari segi representasi maupun penerapannya.

Kita lihat dari representasi visual. Perhatikan Gambar 3.5 berikut.



(a)



(b)

(c)

Gambar 3.5 Representasi Persamaan dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Gambar 3.5 bagian (a) merupakan representasi persamaan nilai mutlak dan gambar bagian (b) dan (c) representasi pertidaksamaan nilai mutlak dengan titik pangkal 0.

Persamaan nilai mutlak direpresentasikan sebagai jarak dari titik pangkal terhadap titik-ujungnya, sedangkan pertidaksamaan nilai mutlak direpresentasikan sebagai interval/ jangkauan/jarak dari titik-titik ujungnya. Jelas ini dua hal yang sangat berbeda.

Pada persamaan nilai mutlak, penyelesaiannya menunjukkan nilai pada titik-titik ujungnya, sedangkan pada pertidaksamaan menunjukkan suatu interval. Pada pertidaksamaan, titik-titik sepanjang interval merupakan penyelesaian pertidaksamaan dan titik-ujungnya dapat merupakan anggota himpunan penyelesaian atau tidak termasuk anggota himpunan, sedangkan pada persamaan nilai mutlak sudah dipastikan titik tersebut merupakan penyelesaian.

Jika jarak antara titik pangkal dengan titik-ujungnya dilambangkan dengan x adalah 30, maka Gambar 3.5 bagian (a) dapat ditulis sebagai persamaan nilai mutlak:

$$|x| = 30$$

Jika suatu interval yang dibatasi oleh titik-titik ujungnya atau selisih antara titik ujung dengan titik pangkalnya tidak lebih dari jarak tersebut, maka Gambar 3.5 bagian (b) dapat ditulis sebagai persamaan nilai mutlak:

$$|x| \leq 30$$

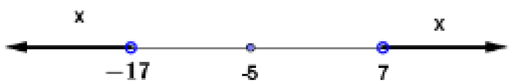
Jika suatu interval yang dibatasi oleh titik-titik ujungnya atau selisih antara titik ujung dengan titik pangkalnya lebih atau sama dari jarak tersebut, maka Gambar 3.5 bagian (c) dapat ditulis sebagai persamaan nilai mutlak:

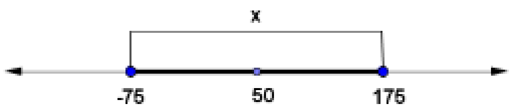
$$|x| > 30$$

Gambar 3.5 bagian (a), (b),dan (c) akan berhubungan dengan pemaknaan pada penerapan penyelesaian masalah suatu konteks yang diberikan. Dapatkah kalian membedakannya ketika berhadapan dengan suatu konteks?

C SOAL LATIHAN

1. Selesaikan pertidaksamaan berikut ini.
   a. $|3x - 4| > 2$
   b. $|2x - 5| \leq 3$
   c. $|3 + 2x| \leq |4 - x|$
   d. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leq \frac{1}{2}$
   e. $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

2. Nyatakan interval-interval berikut dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.
   a. 

   b. 

3. Putaran mesin suatu motor rata-rata adalah 5000 rpm. Putaran mesin dapat dinaikkan atau diturunkan berkisar pada 500 rpm sesuai dengan ketentuan.
   a. Gambarkan pernyataan tersebut dalam garis bilangan.
   b. Nyatakan pernyataan tersebut dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak.
   c. Tentukan putaran mesin maksimum dan minimum.
   d. Diketahui putaran mesin adalah 6000 rpm, apakah nilai tersebut masuk pada kisaran putaran mesin yang ditetapkan?
   e. Berikan contoh banyaknya putaran mesin yang masuk pada kisaran putaran mesin yang sudah ditetapkan dan banyaknya putaran mesin diluar ketentuan yang sudah ditetapkan

4. Elektroda busi harus dipertahankan pada suhu kerja yang tepat, yaitu antara 400^0C sampai 800^0C, dengan rata-rata suhu 600^0C.
   a. Gambarkan pernyataan tersebut dalam garis real.
   b. Nyatakan pernyataan tersebut dalam interval bentuk notasi kurung.
   c. Nyatakan pernyataan tersebut dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak.

d. Berapakah selisih suhu terendah dan tertinggi terhadap rata-rata suhu elektroda busi?
e. Kenaikan suhu elektroda busi sebesar 500^0C terhadap rata-ratanya. Apakah kondisi ini termasuk pada kategori suhu kerja yang tepat?

ALTERNATIF JAWABAN SOAL LATIHAN

JAWABAN LATIHAN SOAL: INTERVAL

1. Interval bentuk notasi pembentuk-himpunan dan ruas garis.

   a. 

   b. 

   c. 

2. Interval dalam bentuk notasi kurung dan pembentuk-himpunan.
   a. $(-\infty, 10] = \{x|x \leq 10\}$
   b. $[2, \infty) = \{x|x > 2\}$
   c. $(-7,1] = \{x| -7 < x \leq 1\}$

3. Nyatakan interval berikut dalam bentuk notasi kurung.
   a. $(0{,}37; \infty)$
   d. $(-4{,}7]$
   e. $(-\infty, -5]$

4. $[20{,}60) = \{x|20 \leq x < 60\}$

JAWABAN LATIHAN SOAL: NILAI MUTLAK

1. Bentuk nilai mutlak
   a. $|2| = 2$
   b. $-x = x$

2. Bentuk berikut tanpa menggunakan nilai mutlak.
   a. $|7 - 13| = 13 - 1$
   b. $\left|\pi - \sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - \pi$
   c. $|8| - |-5| = 8 - 5$

Identifikasi persamaan linear satu variabel

1) $5x = 100$ (persamaan linear satu variabel)
2) $x + 1 = 5$ (persamaan linear satu variabel)
3) $x + 1 = x - 5$ (persamaan linear satu variabel)
4) $y = \frac{100}{7}$ (persamaan linear satu variabel)
5) $2x + y = 4$ (bukan persamaan linear satu variabel)
6) $y = x - 5$ (bukan persamaan linear satu variabel)
7) $x^2 = 7$ (bukan persamaan linear satu variabel)
8) $x + x^2 = 7$ (bukan persamaan linear satu variabel)
9) $x^2 - y = 5$ (bukan persamaan linear satu variabel)
10) $x^2 + y^2 = 36$ (bukan persamaan linear satu variabel)

JAWABAN LATIHAN SOAL: PERSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL

1. Penyelesaian persamaan linear satu variabel.
   a. $3z + 5 = 9 - z$
   $\Leftrightarrow 3z + z = 9 - 5$
   $\Leftrightarrow 4z = 4$
   $\Leftrightarrow z = 1$

   b. $5y - y = 50 + 9y$
   $\Leftrightarrow 5y - y - 9y = 50$
   $\Leftrightarrow -5y = 50$
   $\Leftrightarrow y = -10$

c. $\frac{2}{7}y + \sqrt{2} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{7}y = 4 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{7}{2}\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

2. Berdasarkan definisi nilai mutlak,

a. $|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{jika } x > -2 \\ 0, & \text{jika } x = -2 \\ -x-2, & \text{jika } x < -2 \end{cases}$

b. $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{jika } x > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jika } x = \frac{1}{2} \\ 1-2x, & \text{jika } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

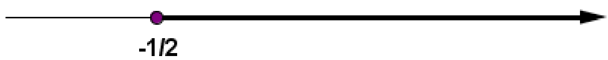
JAWABAN LATIHAN SOAL: PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL

1) $3 - x \leq 5 + 3x$

$\Leftrightarrow -x - 3x \leq 5 - 3$

$\Leftrightarrow -4x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$



2) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x \leq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \leq 3$

3) $3x - 5 < \frac{3}{4}x + \frac{1-x}{3}$

$\Leftrightarrow 3x - 5 < \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x$

$\Leftrightarrow 3x - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{3}x < \dfrac{1}{3} + 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{36}{12}x - \dfrac{9}{12}x + \dfrac{4}{12}x < \dfrac{4}{12} + \dfrac{60}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{31}{12}x < \dfrac{64}{12}$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{64}{31}$

4) $2 \leq 5 - 3x < 11$

$\Leftrightarrow 2 - 5 \leq -3x < 11 - 5$

$\Leftrightarrow -3 \leq -3x < 6$

$\Leftrightarrow 1 \geq x > -2$

$\Leftrightarrow -2 < x \leq 1$

5) $2 \geq -3 - 3x \geq -7$

$\Leftrightarrow 2 + 3 \geq -3x \geq -7 + 3$

$\Leftrightarrow 5 \geq -3x \geq -4$

$\Leftrightarrow -5 \leq 3x \leq 4$

$\Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \leq x \leq \dfrac{4}{3}$

6) $\frac{5}{x} < \frac{3}{4}$

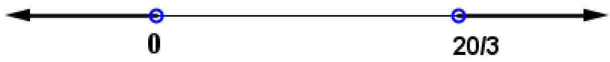
$\Leftrightarrow \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{4} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{20 - 3x}{4x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\left(\frac{20}{3} - x\right)}{4x} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{20}{3} - x}{4x} < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$ atau $x > \frac{20}{3}$



JAWABAN LATIHAN SOAL: PERSAMAAN KUADRAT

1. Penyelesaian persamaan dengan pemfaktoran dan sifat perkalian.
   a. $1 - x - 2x^2 = 0$
      $\Leftrightarrow (1 + x)(1 - 2x) = 0$
      $\Leftrightarrow (1 + x) = 0$ atau $(1 - 2x) = 0$
      $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = \dfrac{1}{2}$

   b. $4x^2 + 9x = 9$
      $\Leftrightarrow 4x^2 + 9x - 9 = 0$
      $\Leftrightarrow (4x - 3)(x + 3) = 0$
      $\Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$ atau $x = -3$

   c. $x^2 - 3x + 2 = 0$
      $\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$
      $\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = 2$

2. Bentuk kuadrat.
   a. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = 4x^2 - 4x + 1$
   b. $\left(2x - \sqrt{3}\right)^2 = 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3$
   c. $\frac{1}{2}\left(4x - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(16x^2 - \frac{48}{5}x - \frac{36}{25}\right) = 8x^2 - \frac{24}{5}x - \frac{18}{25}$

JAWABAN LATIHAN SOAL: PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

1. $1 - x - 2x^2 \leq 0$

   Kita ketahui bahwa $1 - x - 2x^2 = 0 \iff (1 + x)(1 - 2x) = 0$

   $$\iff (1 + x) = 0 \text{ atau } (1 - 2x) = 0 \iff x = -1 \text{ atau } x = \frac{1}{2}$$

   Sehingga diperoleh interval

   $$(-\infty, -1], \left[-1, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

   melalui uji interval diperoleh penyelesaian pertidaksamaan $1 - x - 2x^2 \leq 0$ adalah

   $$(-\infty, -1] \text{ atau } \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

2. $4x^2 + 9x > 9$

   Kita ketahui bahwa $4x^2 + 9x - 9 = 0 \iff (4x - 3)(x + 3) = 0$

   $$\iff x = \frac{3}{4} \text{ atau } x = -3$$

   Sehingga diperoleh interval

   $$(-\infty, -3), \left(-3, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$$

   melalui uji interval diperoleh penyelesaian pertidaksamaan $4x^2 + 9x > 9$ adalah

   $$(-\infty, -3) \text{ atau } \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$$

3. $x^2 - 3x + 2 < 0$

   Kita ketahui bahwa

   $x^2 - 3x + 2 = 0$

   $\iff (x - 1)(x - 2) = 0$

   $\iff x = 1$ atau $x = 2$

   Sehingga diperoleh interval

   $$(-\infty, 1), (1,2), (2, \infty)$$

   melalui uji interval diperoleh penyelesaian pertidaksamaan $4x^2 + 9x > 9$ adalah (1,2).

JAWABAN LATIHAN SOAL: PERSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL

1. Lambang nilai mutlak.
   a. $|-7| = 7$
   b. $|-a| = a$

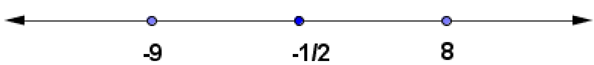
2. Bentuk persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.

   $|y| = 125$
   $|y| - |2| = 0$
   $|y| + 3 = 7$
   $|4y| = |2|$
   $|y + 2| = 0$
   $|3y - 5| = 4$
   $|y - 5| = |y + 8|$
   $\left|\dfrac{y+5}{3y-1}\right| = 9, x \neq \dfrac{1}{3}$

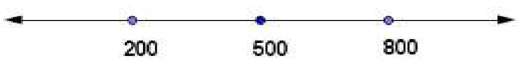
   Bukan bentuk persamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel

   $|y^2| = 0$
   $|2y^2 + 9y| = 13$

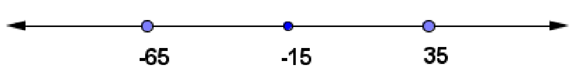
3. Representasi bentuk persamaan nilai mutlak pada garis bilangan:
   a. $|2x + 1| = 17$



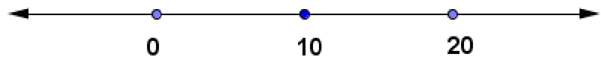
   b. $|x - 500| = 300$



   c. $|100 - 2x| = 30 \Leftrightarrow 100 - 2x = -30$ atau $100 - 2x = 30$
   $\Leftrightarrow -2x = -30 - 100$ atau $-2x = 30 - 100$
   $\Leftrightarrow -2x = -130$ atau $-2x = -70$
   $\Leftrightarrow x = -65$ atau $x = 35$
   Titik pangkal adalah -15

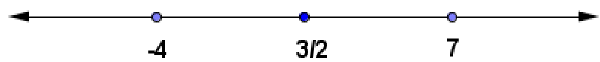


4. Representasi nilai mutlak.

a. 

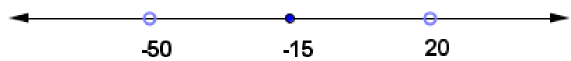
Titik acuan adalah 10 dan selisih titik ujung terhadap titik pangkal 10 sehingga dapat ditulis,

$$|x-10| \leq 10$$

b. 

Titik acuan adalah $\frac{3}{2}$ dan selisih titik ujung terhadap titik pangkal $\frac{11}{2}$ sehingga dapat ditulis,

$$\left|x-\frac{3}{2}\right| \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow |2x-3| \leq 11$$

c. 

Titik acuan adalah -15 dan selisih titik ujung terhadap titik pangkal 35 sehingga dapat ditulis,

$$|x-(-15)| \leq 35 \Leftrightarrow |x+15| \leq 35$$

5. Menentukan nilai x dari persamaan nilai mutlak dengan menggunakan sifat persamaan nilai mutlak.

a. $|x| = \sqrt{625} \Leftrightarrow |x| = 25 \Leftrightarrow x = -25$ atau $x = 25$

b. $|x| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ atau $x = \frac{2}{3}$

c. $|x| = 10^3 \Leftrightarrow x = -10^3$ atau $x = 10^3$

d. $|x| = 4^{-7} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4^7}$ atau $x = \frac{1}{4^7}$

e. $|5-2x| = 0{,}25$

$\Leftrightarrow 5-2x = -0{,}25$ atau $5-2x = 0{,}25$

$\Leftrightarrow -2x = -0{,}25-5$ atau $-2x = 0{,}25-5$

$\Leftrightarrow -2x = -5{,}25$ atau $-2x = -4{,}75$

$\Leftrightarrow x = 2{,}625$ atau $x = 2{,}375$

f. $|4x+3| = 7$

$\Leftrightarrow 4x+3 = -7$ atau $4x+3 = 7$

$\Leftrightarrow 4x = -7-3$ atau $4x = 7-3$

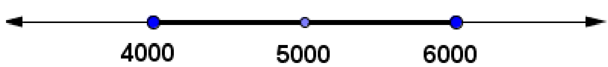
$\Leftrightarrow 4x = -10$ atau $4x = 4$
$\Leftrightarrow x = -2{,}5$ atau $x = 1$

g. $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 5$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-2} = -5$ atau $\dfrac{x+2}{x-2} = 5$
$\Leftrightarrow x + 2 = -5(x-2)$ atau $x + 2 = 5(x-2)$
$\Leftrightarrow x + 2 = -5x + 10$ atau $x + 2 = 5x - 10$
$\Leftrightarrow x + 5x = 10 - 2$ atau $x - 5x = -10 - 2$
$\Leftrightarrow 6x = 8$ atau $-4x = -12$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ atau $x = 3$

h. $|x-2| = |3-2x|$
$\Leftrightarrow |x-2|^2 = |3-2x|^2$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = (3-2x)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 - 12x + 4x^2$
$\Leftrightarrow 9 - 4 - 12x + 4x + 4x^2 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow (3x-5) = 0$ atau $(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ atau $x = 1$

6. Rata-rata putaran mesin adalah 5000 rpm serta kenaikan dan penurunan putaran mesin sebesar 1000 rpm. Maka kenaikan dan penurunan maksimum masing-masing adalah 6000 rpm dan 4000 rpm.

   a. Garis bilangan yang merepresentasikan pernyataan tersebut.



   b. Berdasarkan gambar pada bagian (a), kita dapat menuliskan sebuah interval

$$4000 \leq x \leq 6000$$

Karena rata-rata putaran mesin sebagai titik acuan dan berdasarkan sifat urutan diperoleh,

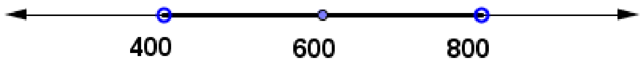
$$4000 - 5000 \leq x - 5000 \leq 6000 - 5000$$
$$\Leftrightarrow -1000 \leq x - 5000 \leq 1000$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$-1000 \leq x - 5000 \leq 1000 \Leftrightarrow |x - 5000| \leq 1000$$

c. Berdasarkan interval, kita dapat menentukan putaran mesin maksimum dan minimum masing-masing adalah 6000 rpm dan 4000 rpm.

7. Diketahui rentang suhu elektroda busi antara 400^0C sampai 800^0C, dengan rata-rata suhu 600^0C dapat digambarkan pada garis bilangan berikut.



a. Berdasarkan garis bilangan tersebut, kita dapat menuliskan sebuah interval,

$$400 < x < 800$$

Karena titik pangkalnya 600, maka berdasarkan sifat urutan diperoleh,

$$400 - 600 < x - 600 < 800 - 600 \Leftrightarrow -200 < x - 600 < 200$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$-200 < x - 600 < 200 \Leftrightarrow |x - 600| < 200$$

b. Berdasarkan jawaban (a), dapat dilihat bahwa selisih suhu terendah dan tertinggi terhadap rata-rata suhu elektroda busi adalah 200^0C.

JAWABAN LATIHAN SOAL: PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK BENTUK LINEAR SATU VARIABEL

1. Penyelesaian pertidaksamaan dengan menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak.

   a. $|3x - 4| > 2$

   $\Leftrightarrow 3x - 4 < -2$ atau $3x - 4 > 2$

   $\Leftrightarrow 3x < -2 + 4$ atau $3x > 2 + 4$

   $\Leftrightarrow 3x < 2$ atau $3x > 6$

   $\Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$ atau $x > 2$

   Himpunan penyelesaian adalah $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty)$

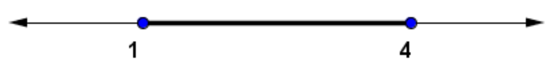
   b. $|2x - 5| \leq 3$

   $\Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3$

   $\Leftrightarrow -3 + 5 \leq 2x \leq 3 + 5$

   $\Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8$

   $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

   Himpunan penyelesaian adalah [1,4]

   c. $|3 + 2x| \leq |4 - x|$

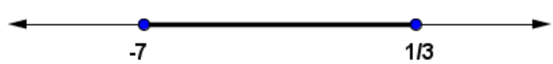
   $\Leftrightarrow |3 + 2x|^2 \leq |4 - x|^2$

   $\Leftrightarrow (3 + 2x)^2 \leq (4 - x)^2$

   $\Leftrightarrow 9 + 12x + 4x^2 \leq 16 - 8x + x^2$

   $\Leftrightarrow 3x^2 + 20x - 7 \leq 0$

   $\Leftrightarrow (3x - 1)(x + 7) \leq 0$

   Himpunan penyelesaian adalah $\left[-7, \frac{1}{3}\right]$

   d. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leq \frac{1}{2}$

   $\Leftrightarrow \left|\dfrac{6 - 5x}{3 + x}\right|^2 \leq \left|\dfrac{1}{2}\right|^2$

   $\Leftrightarrow \left(\dfrac{6 - 5x}{3 + x}\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(6-5x)^2}{(3+x)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6-5x)^2}{(3+x)^2} - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(6-5x)^2 - (3+x)^2}{(3+x)^2} \leq 0$$

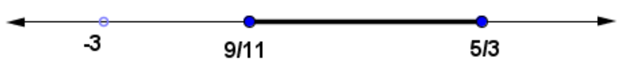
$$\Leftrightarrow \frac{4(36-60x+25x^2) - (9+6x+x^2)}{(3+x)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{100x^2 - 240x + 144 - x^2 - 6x - 9}{(3+x)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{99x^2 - 246x + 135}{(3+x)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{33x^2 - 82x + 45}{(3+x)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-5)(11x-9)}{(3+x)^2} \leq 0$$



Himpunan penyelesaian adalah $\left[\frac{9}{11}, \frac{5}{3}\right]$

e. $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{1}{x-2}\right|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{5}{2x-1}\right|^2 \leq \left|\frac{1}{x-2}\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2x-1}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{x-2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{(2x-1)^2} \leq \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25(x-2)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25(x^2-4x+4) - (4x^2-4x+1)}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2 - 100x + 100 - 4x^2 + 4x - 1}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{21x^2 - 96x + 99}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

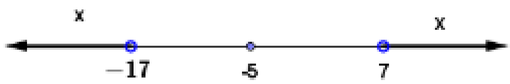
$$\Leftrightarrow \frac{7x^2 - 32x + 33}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7x-11)(x-3)}{(2x-1)^2(x-2)^2} \leq 0$$

terdapat selang $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{7}\right], \left[\frac{11}{7}, 2\right), (2,3], [3, \infty)$

Melalui uji interval, diperoleh himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah $\left[\frac{11}{7}, 2\right) \cup (2,3]$

2. Menyatakan interval dalam bentuk pertidaksamaan nilai mutlak bentuk linear satu variabel.



a. Interval tersebut adalah

$$x < -17 \text{ atau } x > 7$$

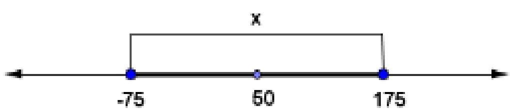
Karena titik pangkal -5, maka berdasarkan sifat urutan,

$$x - (-5) < -17 - (-5) \text{ atau } x - (-5) > 7 - (-5)$$

$$\Leftrightarrow x + 5 < -12 \text{ atau } x + 5 > 12$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$|x + 5| > 12$$



b. Interval tersebut adalah

$$-75 \leq x \leq 175$$

Karena titik pangkal 50, maka berdasarkan sifat urutan,

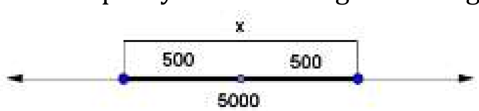
$$-75 - 50 \leq x - 50 \leq 175 - 50$$

$$\Leftrightarrow -125 \leq x - 50 \leq 125$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$|x - 50| > 125$$

3. Diketahui putaran mesin suatu motor rata-rata adalah 5000 rpm. Kisaran naik atau turun putaran mesin adalah 500 rpm.
   a. Gambar pernyataan dalam garis bilangan.



b. Berdasarkan gambar, maka titik ujung interval adalah 4500 dan 5500. Sehingga interval tersebut adalah:

$$4500 \leq x \leq 5500$$

Karena titik pangkal 5000, maka berdasarkan sifat urutan diperoleh,

$$4500 - 5000 \leq x - 5000 \leq 5500 - 5000$$
$$\Leftrightarrow -500 \leq x - 5000 \leq 500$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$|x - 5000| \leq 500$$

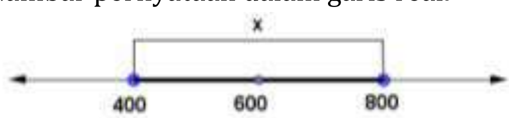
c. Putaran mesin maksimum dan minimum merupakan titik ujung, yaitu 5500 dan 4500.

d. Putaran mesin sebesar 6000 rpm tidak termasuk pada kisaran putaran mesin yang ditetapkan.

e. Contoh banyaknya putaran mesin yang masuk pada kisaran putaran mesin yang sudah ditetapkan adalah 5250 rpm dan banyaknya putaran mesin diluar ketentuan yang sudah ditetapkan adalah 4000 rpm.

4. Diketahui kisaran suhu elektroda busi yaitu antara 400^0C sampai 800^0C, dengan rata-rata suhu 600^0C.

a. Gambar pernyataan dalam garis real.



b. Berdasarkan gambar interval pada bagian (a), dapat ditulis interval dalam bentuk notasi kurung yaitu (400,800).

c. Berdasarkan (b), dapat dinyatakan interval,

$$400 < x < 800$$

Karena titik pangkalnya 600, berdasarkan sifat urutan, dapat ditulis,

$$400 - 600 < x - 600 < 800 - 600$$
$$\Leftrightarrow -200 < x - 600 < 200$$

Berdasarkan sifat pertidaksamaan nilai mutlak,

$$|x - 600| < 200$$

c. Selisih suhu terendah dan tertinggi terhadap rata-rata suhu elektroda busi adalah 200^0C.

d. Kenaikan suhu elektroda busi sebesar 500^0C terhadap rata-ratanya tidak termasuk pada kategori suhu kerja yang tepat.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, G.B. & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Jamma, J. & Wagino. (2008a). Teknik Sepeda Motor Jilid 1 untuk SMK. Jakarta : Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan, Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah, Departemen Pendidikan Nasional.

Mundit, A.K. Soal dan Penyelesaian Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Jilid 1. Armico.

Stewart, J. (2001). Kalkulus Edisi Keempat Jilid 1. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E.J. & Rigdon, S.E. (2007). Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid *1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.